Abstract

The question whether a graph has a Hamilton cycle—a cycle that visits every vertex exactly once—is one of the oldest and most fundamental problems on graphs, with a wide range of practical applications. The starting point of this thesis is Lovász' conjecture from the 1970s, which asserts that every connected and vertex-transitive graph has a Hamilton cycle, apart from five small counterexamples. A vertex-transitive graph is a graph that 'looks the same' from the point of view of any vertex. The vertex-transitive graphs we investigate in this thesis arise from combinatorial Gray code problems, i.e., algorithmic problems of generating a family of combinatorial objects by applying only a small transformation in each step. One classical example is the problem of generating all bitstrings of length n by flipping a single bit in each step. The corresponding graph for this problem is known as n-dimensional hypercube.

In this thesis we present solutions to several long-standing Gray code problems. Specifically, we prove that the subgraph of the $(2n+1)$-dimensional hypercube formed by all bitstrings with Hamming weight n or $n+1$ has a Hamilton cycle for any $n \geq 1$. This problem, known as the *middle levels conjecture* or *revolving door conjecture*, was raised in the 1980s by Havel, Buck and Wiedemann. We also provide corresponding time- and space-optimal algorithms to compute the corresponding Gray code efficiently. The most general version of these algorithms generates all bitstrings of length n within an arbitrary range $[k, l]$ of Hamming weights, where $0 \leq k \leq l \leq n$. Generalizing the result on the middle levels conjecture, we show that all bipartite Kneser graphs $H(n, k)$, where $k \geq 1$ and $n \geq 2k+1$, have a Hamilton cycle, resolving a problem due to Simpson and Roth from the 1990s. Moreover, we show that all Kneser graphs of the form $K(2k + 2^a, k)$, where $k \geq 1$ and $a \geq 0$, except the Petersen graph $K(5, 2)$, have a Hamilton cycle. This last result solves a problem that was raised in the 1970s by Meredith, Lloyd and Biggs.

Zusammenfassung

Die Frage, ob ein Graph einen Hamiltonkreis besitzt—d.h. einen Kreis, der jeden Knoten des Graphen genau einmal besucht—ist eine der ältesten und fundamentalsten Graphenprobleme, mit einer Vielzahl von praktischen Anwendungen. Der Ausgangspunkt für diese Arbeit ist eine Vermutung von Lovász aus den 1970er Jahren, die behauptet, dass jeder zusammenhängende und knotentransitive Graph einen Hamiltonkreis besitzt, mit fünf kleinen Ausnahmen. Ein knotentransitiver Graph ist ein Graph, der von jedem Knoten aus betrachtet 'gleich aussieht'. Die knotentransitiven Graphen, die wir in dieser Arbeit untersuchen, entstehen aus kombinatorischen Gray-Code-Problemen, d.h., algorithmischen Problemen zur Erzeugung einer Familie von kombinatorischen Objekten durch Anwendung einer kleinen Transformation in jedem Schritt. Ein klassisches Beispiel dafür ist das Problem, alle Bitfolgen der Länge n durch Flippen eines einzelnen Bits in jedem Schritt zu erzeugen. Der dazugehörige Graph für dieses Problem ist als n-dimensionaler Hyperwürfel bekannt.

In dieser Arbeit präsentieren wir Lösungen für verschiedene lange offene Gray-Code-Probleme. Zunächst beweisen wir, dass der Teilgraph des $(2n + 1)$-dimensionalen Hyperwürfels, der durch alle Bitfolgen mit Hamming-Gewicht n oder $n + 1$ induziert wird, einen Hamiltonkreis für jedes $n \geq 1$ besitzt. Dieses Problem ist als *Middle-Levels-Vermutung* oder *Drehtür-Vermutung* bekannt, und wurde erstmal in den 1980er Jahren durch Havel, Buck und Wiedemann erwähnt. We liefern auch dazugehörige zeit- und speicherplatzoptimale Algorithmen zur effizienten Berechnung der entsprechenden Gray-Codes. Die allgemeinste Version dieser Algorithmen erzeugt alle Bitfolgen der Länge n innerhalb eines beliebigen Intervalls $[k, l]$ von Hamming-Gewichten, wobei $0 \leq k \leq l \leq n$. Als Verallgemeinerung der Middle-Levels-Vermutung zeigen wir, dass alle sogenannten bipartiten Knesergraphen $H(n, k)$, wobei $k \geq 1$ und $n \geq 2k+1$ gilt, einen Hamiltonkreis besitzen, womit eine Frage beantwortet wird, die von Simpson und Roth in den 1990er Jahren erstmals erwähnt wurde. Außerdem zeigen wir, dass alle Knesergraphen der Form $K(2k+2^a, k)$, wobei $k \geq 1$ und $a \geq 0$ gilt, außer des Petersengraphen $K(5, 2)$, einen Hamiltonkreis besitzen. Dieses letztgenannte Resultat löst ein offenes Problem, dass in den 1970er Jahren erstmals von Meredith, Lloyd and Biggs erwähnt wurde.