

# ADVANCES FOR DISCRETE CONFORMAL MAPS

Dr. rer. nat. Ulrike Bücking  
ORCID: 0000-0001-9892-2609

HABILITATIONSSCHRIFT  
an der Fakultät II  
Mathematik und Naturwissenschaften  
der Technischen Universität Berlin

Lehrgebiet Mathematik

Vorsitzender des Habilitationsausschusses:  
Prof. Dr. Andreas Knorr

Gutachter:  
Prof. Dr. Alexander I. Bobenko  
Prof. Dr. Konrad Polthier  
Prof. Dr. Johannes Wallner  
Prof. Dr. Max Wardetzky

Eröffnung des Habilitationsverfahrens: 17.10.2018  
Tag des Habilitationskolloquiums: 31.10.2019  
Fakultätsratsbeschluss über die Zuerkennung der Lehrbefähigung: 04.12.2019

Berlin 2020

## Abstract

Conformal maps may be characterized in various ways leading to different discretizations. My cumulative habilitation thesis contains advances in the study of discrete conformal maps.

Two immersed triangulations with the same combinatorics are *conformally equivalent* if all length cross-ratios agree for all corresponding pairs of incident triangles. Any smooth conformal map may be approximated on compact subsets by discrete conformal maps for triangular lattices with acute angles. Moreover, the discrete directional derivatives of all orders also converge uniformly on compact subsets. Together with Stefan Born and Boris Springborn, we investigate the quasiconformal distortion of all piecewise projective maps which can be used for interpolation on the triangular faces.

For a sequence of pairs of *circle patterns* with the same combinatorics and intersection angles each of which approximates a bounded simply connected domain we prove convergence of a subsequence to the Riemann map under certain conditions on the angles. Also, we study the rigidity of infinite embedded circle patterns.

Studying discrete conformal symmetry has motivated us to introduce the notion of *discrete  $\vartheta$ -conformality* which interpolates between discrete conformal equivalence and circle patterns. We show that the condition for discrete  $\vartheta$ -conformal maps is variational.

Together with Daniel Matthes we show that the solution of a Björling problem for real analytic isothermic surfaces can be approximated by *discrete isothermic surfaces*. Here, discrete conformality means that squares are mapped to conformal squares (images under Möbius transformations).

Together with Alexander Bobenko we investigate *discrete holomorphic maps* from the linear theory on ramified coverings of the Riemann sphere. For suitable adapted triangulations, we prove convergence of the discrete period matrices.

## Zusammenfassung

Konforme Abbildungen haben verschiedenste Charakterisierungen und entsprechende diskrete Modelle. Meine Habilitationsschrift enthält Fortschritte für diskrete konforme Abbildungen.

Zwei Triangulierungen mit derselben Kombinatorik sind konform äquivalent, wenn sie in allen Längen-Doppelverhältnissen entsprechender Dreieckspaare übereinstimmen. Jede konforme Abbildung kann auf kompakten Mengen durch *diskrete konforme Abbildungen* auf Dreiecksgittern mit spitzen Winkeln approximiert werden. Die diskreten Richtungsableitungen aller Ordnungen konvergieren gleichmäßig auf kompakten Teilmengen. Zusammen mit Stefan Born und Boris Springborn untersuchen wir die quasikonforme Verzerrung der stückweise projektiven Abbildungen für die Interpolation auf den Dreiecken.

Für eine Folge von Paaren von *Kreismustern* mit derselben Kombinatorik und Schnittwinkeln, die jeweils ein beschränktes einfach zusammenhängendes Gebiet approximieren, konvergiert eine Teilfolge gegen die Riemannsche Abbildung unter geeigneten Bedingungen an die Winkel. Zudem untersuchen wir die Eindeutigkeit von unendlichen Kreismustern.

Die Untersuchung konformer Symmetrie hat die Einführung von diskreter  $\vartheta$ -Konformität motiviert, die zwischen diskreter konformer Äquivalenz und Kreismustern interpoliert. Die Bedingung für *diskrete  $\vartheta$ -konforme Abbildungen* ist variationell.

Zusammen mit Daniel Matthes zeigen wir, dass die Lösung eines Björling-Problems für reell-analytische Isothermflächen durch *diskrete Isothermflächen* approximierbar ist. Dabei meint diskret konform hier, dass Quadrate jeweils auf ihre Bilder unter Möbiustransformationen abgebildet werden.

Zusammen mit Alexander Bobenko untersuchen wir in der linearen Theorie diskrete konforme Funktionen auf Überlagerungen der Riemannschen Sphäre. Für geeignete angepasste Triangulierungen beweisen wir die Konvergenz der diskreten Periodenmatrizen.